Рассматривается сумма случайного числа случайных слагаемых $Z=\sum_{i=1}^{Y} X_i$

где $X_1, X_2, \ldots$ - последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, Y – положительная, не зависящая от них целочисленная случайная величина с законом распределения

$P(Y=n)=P_n \quad (n=1,2,\ldots,N)$

Требуется найти числовые характеристики случайной величины Z .

Решение

Допустим, что случайная величина Y приняла значение $n \ (n=1,2,\ldots,N)$.

В этом случае условное математическое ожидание будет

$$\mathrm{M}[Z_n]=\mathrm{M}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right]=nm_x,$$

где

$$m_x=\mathrm{M}[X]$$

Тогда полное математическое ожидание найдем из выражения

$$m_z=\mathrm{M}[Z]=\sum_{n=1}^{N} nm_x P_n=m_x m_y,$$

где

$$m_y=M[Y]=\sum_{n=1}^{N} nP_n$$

Таким же образом найдем и условный второй начальный момент при условии что $Y=n$:

$$M\left[Z_n^2\right]=M\left[\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2\right]=M\left[\sum_{i=1}^{n} X_i^2+2\sum_{i<j} X_i X_j\right]=\sum_{i=1}^{n} M\left[X_i^2\right]+2\sum_{i<j} M\left[X_i X_j\right]=\sum_{i=1}^{n} M\left[X_i^2\right]+$$

$$+2\sum_{i<j} M\left[X_i\right]\cdot M\left[X_j\right]=\sum_{i=1}^{n}\alpha_{2x}+2\sum_{i<j} m_x m_x=n\alpha_{2x}+2\frac{n(n-1)}{2}m_x^2=nD_x+n^2m_x^2$$

где

$$D_x=D[X]=\alpha_{2x}-m_x^2$$

Второй начальный момент случайной величины Z

$$\alpha_{2z}=M\left[Z^2\right]=\sum_{n=1}^{N} M\left[Z_n^2\right]P_n=\sum_{n=1}^{N}\left(nD_x+n^2m_x^2\right)P_n=D_x m_y+m_x^2\alpha_{2y},$$

где

$$\alpha_{2y}=\sum_{n=1}^{N} n^2 P_n=D_y+m_y^2$$

Дисперсия случайной величины Z

$$D_z=\alpha_{2z}-m_z^2=D_x m_y+m_x^2\alpha_{2y}-m_x^2m_y^2=D_x m_y+m_x^2 D_y$$

Таким образом

$$\sigma_z=\sqrt{\sigma_x^2 m_y+\sigma_y^2 m_x^2},$$

где

$$\sigma=\sqrt{D}$$